# Metodi numerici per le equazioni differenziali alle derivate parziali: elementi finiti

Gli elementi finiti sono particolarmente adatti alla risoluzione delle PDE del II ordine e non richiedono che il dominio sia regolare: la discretizzazione è infatti tramite mesh, non attraverso griglia regolare.

Consideriamo l'equazione di Poisson monodimensionale:

$$\begin{cases} -\mu \cdot u''(x) = f(x) & \text{in } [a,b] \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases}$$

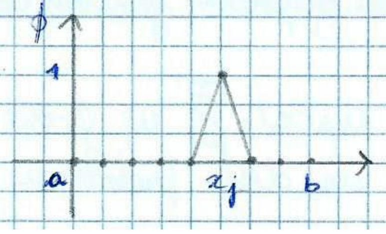
Questa formulazione è detta "forte" in contrapposizione a quella "debole" rappresentata dall'applicazione del metodo degli elementi finiti. Per applicarlo bisogna modificare l'equazione di partenza definendo anzitutto uno spazio di funzioni test:

$$V = \{ v \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } v(a) = v(b) = 0 \}$$

Le funzioni $v$ sono continue e derivabili con derivata continua in $[a,b]$ e hanno valori nulli al bordo.
A tale spazio continuo corrisponde il seguente spazio discreto (discretizzando l'intervallo $[a,b]$):

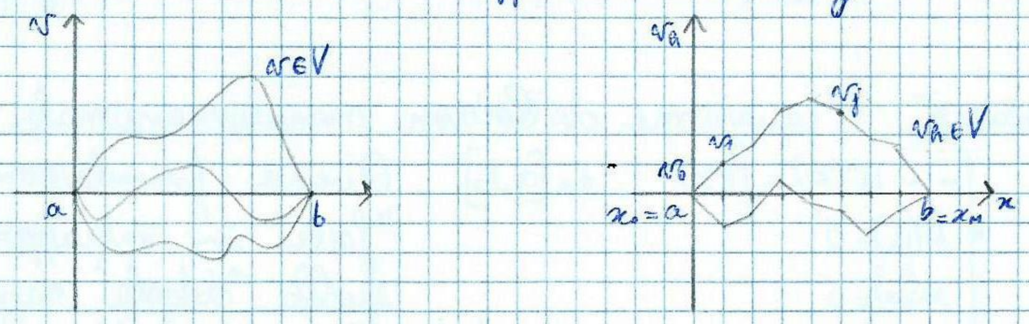
$$V_h = \{ v_h \in C^0([a,b]),\ v_h(a) = v_h(b) = 0,\ v_h|_I \in \mathbb{P}^1 \}$$

Le funzioni $v_h$ sono continue e nulle sul bordo; sono inoltre polinomi di grado 1 in ogni intervallo di ampiezza $h$. In altre parole sono funzioni lineari a tratti (il grado 1 corrisponde a rette). Si possono usare (e lo si fa più frequentemente) polinomi quadratici, appartenenti cioè a $\mathbb{P}^2$.
Perché la necessità di discretizzare lo spazio $V$? Il problema è dato dalla dimensione infinita di $V$, ovvero dall'inesistenza di una base finita (con numero finito di elementi) che consenta di esprimere tutti gli elementi di $V$. Si consideri per confronto $\mathbb{R}^3$: esso possiede dimensione finita poiché esiste la base (canonica) $e = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ che consente di esprimere qualsiasi elemento dello spazio.
Lo spazio discretizzato $V_h$ possiede invece una base considerando $\phi_j$ con valore unitario in $j$ e nulla altrove:




$$\phi_j(x_i) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow v_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} v_j \cdot \phi_j(x)$$

Ogni funzione $v_h \in V_h$ può essere rappresentata combinando opportunamente, mediante coefficienti $v_j \in \mathbb{R}$, gli elementi $\phi_j(x)$ della base di $V_h$.
Graficamente $V$ e $V_h$ sono rappresentabili come segue:




Moltiplichiamo ora l'equazione di Poisson per $v \in V$ e integriamo tra $a$ e $b$:

$$\int_a^b -\mu u'' v \, dx = \int_a^b f \cdot v \, dx$$

Valida $\forall v \in V$. Integriamo per parti il primo membro:

$$-\mu u' \cdot v \Big|_a^b + \int_a^b \mu u' v' \, dx = \int_a^b f v \, dx \quad \forall v \in V$$

Per la definizione di $v \in V$ si ha $-\mu u' v \Big|_a^b = -\mu [u'(b) v(b) - u'(a) v(a)] = 0$
Poniamo ora $a(u,v) = \int_a^b \mu \cdot u' \cdot v' \, dx$ e $F(v) = \int_a^b f \cdot v \, dx$ $\forall v \in V$. Il problema diviene:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

Per cui bisogna determinare la $u$ che soddisfi tale equazione. Se $u$ è soluzione del problema forte allora lo è anche del problema debole $a(u,v) = F(v)$ $\forall v \in V$. Non è vero il viceversa poiché la soluzione del problema debole può avere meno regolarità, cioè essere derivabile solo una volta.
Una proprietà di $a$ è la bilinearità:

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha \, a(u,w) + \beta \, a(v,w) \\ a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha \, a(u,v) + \beta \, a(u,w) \end{aligned} \qquad \forall u, v, w, \alpha, \beta$$

Inoltre $a$ è simmetrica, cioè $a(u,v) = a(v,u)$. In termini discreti il problema diviene determinare $u_h$ tale che:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Per $h \to 0$ la soluzione del problema discreto converge a quella del problema debole. Ricorrendo alla base $\phi(x)$ e ponendo $v_h \equiv \phi_i$ (cioè usando la base di $V_h$, non si perde generalità poiché le formule sono valide $\forall v_h \in V_h$):

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} v_j \cdot \phi_j(x) \longrightarrow u_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} u_j \cdot \phi_j(x)$$

Otteniamo riscritto la soluzione $u_h$ del problema discreto come combinazione delle funzioni di base. Infatti tale soluzione appartiene a $V_h$. Ora, sfruttando le proprietà di $a$ (con $v_h = \phi_i$):

$$a\left(\sum_{j=1}^{M-1} u_j \phi_j, \phi_i\right) = F(\phi_i) \qquad i = 1, \dots, M-1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{M-1} u_j \cdot a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_i) \qquad i = 1, \dots, M-1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{M-1} a(\phi_i, \phi_j)\, u_j = F(\phi_i) \qquad i = 1, \dots, M-1$$

Poniamo $a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$; nel caso di Poisson si ha:

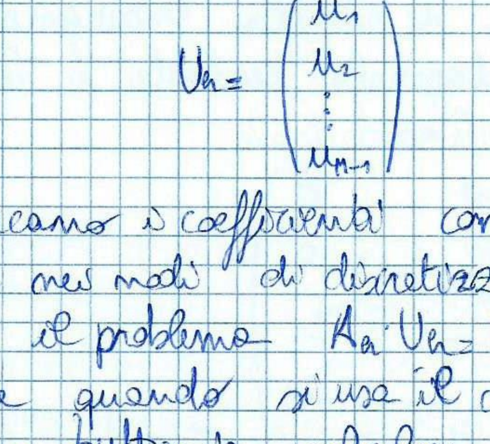
$$a(u, v) = \int_a^b u' v' \, dx \Rightarrow a_{i,j}(\phi_i, \phi_j) = \int_a^b \phi_i' \phi_j' \, dx$$

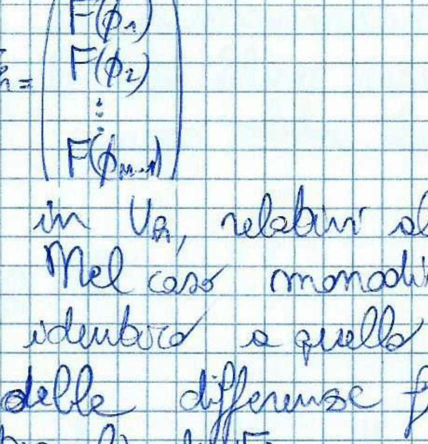
Si ottiene quindi un sistema lineare in cui gli $a_{ij}$ costituiscono la matrice dei coefficienti $A_h$ e:

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix} \qquad F_h = \begin{pmatrix} F(\phi_1) \\ F(\phi_2) \\ \vdots \\ F(\phi_{M-1}) \end{pmatrix}$$

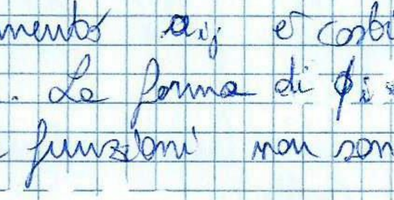
Si cercano i coefficienti contenuti in $U_h$, relativi alla soluzione nei nodi di discretizzazione. Nel caso monodimensionale il problema $A_h U_h = F_h$ è identico a quello da risolvere quando si usa il metodo delle differenze finite. Bisogna soltanto calcolare gli integrali di $F_h$.

L'elemento $a_{ij}$ è costituito da un prodotto contenuto nell'integrale. La forma di $\phi_i$ e $\phi_j$ è tale che il prodotto è nullo se le due funzioni non sono diverse da zero in uno stesso tratto:



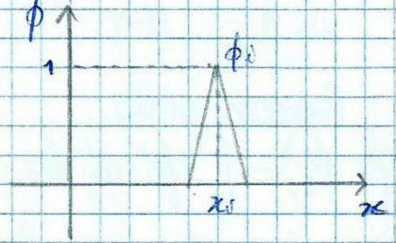

Considerando invece $\phi_{i-1}$ e $\phi_i$ (nel caso dell'equazione di Poisson):




$$a_{i,i-1} = \int_a^b \mu \phi_i' \phi_{i-1}' \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu \cdot \phi_i' \phi_{i-1}' \, dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu \cdot \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{\mu}{h^2} \cdot h = -\frac{1}{h}\mu$$

Abbiamo inserito nell'integrale le derivate prime delle rette $y = \frac{1}{h}x + q$ e $y = -\frac{1}{h}x + q$ che delimitano il tratto compreso tra $x_{i-1}$ e $x_i$, dove entrambe le funzioni sono diverse da zero. Bisogna prestare attenzione a non moltiplicare derivate impossibili; gli estremi di integrazione devono rispettare la successione dei punti angolosi delle $\varphi_i$. Sempre per l'equazione di Poisson possiamo calcolare il termine $a_{i,i+1}$ che tuttavia sarà uguale a $a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = -1/h$. Dobbiamo solamente determinare $a_{ii}$:



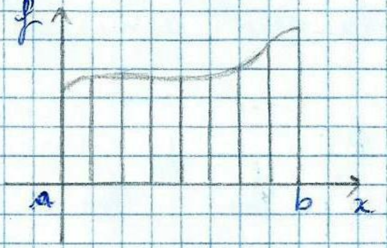

$$a_{ii} = \int_a^b \mu\, \varphi_i' \cdot \varphi_i'\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu (\varphi_i')^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu \cdot (\varphi_i')^2 dx =$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{h^2} \cdot h + \mu \cdot \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{2}{h} \mu$$

Ecco che l'integrale è stato spezzato per evitare i punti di non derivabilità. Pertanto, nel caso dell'equazione di Poisson monodimensionale, la matrice $A_h$ risulta tridiagonale (termini non nulli solo lungo la diagonale "centrale" e le due diagonali subito sopra e sotto ad essa:

$$A_h = \frac{\mu}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il vettore $F_h$ contiene inoltre gli $F(\varphi_i) = \int_a^b f \cdot \varphi_i \, dx$, con $f$ funzione arbitraria. L'integrale può essere approssimato con varie formule:




-) punto medio (valori costanti);
:) trapezi (rette);
∴) Simpson (parabole)